c

**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Математическая логика

Mathematical Logic

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 5

Регистрационный номер рабочей программы: 002184

Санкт-Петербург

2023

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Дисциплина «Математическая логика» входит в перечень обязательных дисциплин, формирующего основную подготовку специалиста в области математических наук. Она представляет собой комплекс знаний умений и навыков, позволяющих овладеть математическими методами; развить у обучающихся навыки решения математических задач.

Целью дисциплины является обучение обучающихся методам математической логики; развитие у студентов доказательного, логического мышления; подготовка к восприятию других математических дисциплин.

Основной задачей курсa является изучение основных разделов математической логики; развитие навыков самостоятельного решения задач; обеспечение базы для усвоения формализованных спецификаций, алгоритмических методов и их компьютерных реализаций.

Отдельные параметры односеместрового курса могут варьироваться по степени сложности в зависимости от начальной подготовки студентов.

Основным методологическим принципом построения программы курса, равно как и всей концепции обучения в целом, является принцип поэтапного системного накопления знаний и формирования необходимых компетенций по модели: от простого и/или знакомого — к сложному и/или незнакомому, а основной методологической стратегией прохождения отдельных разделов программы является ступенчатость и цикличность, предусматривающие постепенный возврат к ранее усвоенному материалу на более высоком концептуальном уровне.

Главный принцип, который лежит в основе данной программы, — это следование концепции Европейского уровня работы с формализацией математических формулировок и тем образовательным стандартам, которые обозначены этим документом в рамках приобретения компетенций, которые включают практические и теоретические компоненты.

По окончании обучения обучающиеся должны знать содержание дисциплины «Математическая логика» и иметь достаточно полное представление о возможностях применения ее разделов в различных прикладных областях науки и техники; уметь формализовывать условия и утверждения средствами математической логики и теории алгоритмов, строить выводы секвенций.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Программа дисциплины рассчитана на обучающихся 2–ого курса. Максимальная эффективность Программы будет обеспечена при следующем условии: студент владеет базовыми математическими понятиями, достаточными для работы с формулировками математических утверждений.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Наименование категории (группы) компетенций | Код и наименование компетенции | Планируемые результаты обучения, обеспечивающие формирование компетенции | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Теоретические и практические основы профессиональной деятельности | ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | Имеет достаточно полное представление о возможностях применения разделов дисциплины «Математическая логика» в различных прикладных областях науки и техники  Умеет применять основы математической логики для решения разнообразных математических задач  Умеет формализовывать условия и утверждения средствами математической логики и теории алгоритмов, строить выводы секвенций | ОПК-1.002184.1. Формулирует и доказывает утверждения в виде формул математической логики |
| 2 | Профессиональные компетенции (академические) | ПКА-1 Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий | Знает содержание дисциплины «Математическая логика» | ПКА-1.002184.1. Излагает и объясняет основные понятия и теоремы математической логики |

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Аудиторная учебная работа: лекции в объеме 2 часа в неделю; практические занятия в объеме 2 часа в неделю, включая выполнение текущих и контрольных заданий.

Самостоятельная работа без участия преподавателя: индивидуальная работа с доступными математическими текстами, а также удовлетворение личных познавательных потребностей.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |  | |  | |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 4 | 30 |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 52 | |  | 28 |  | 34 | | 4 | |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  |  |  |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 | |  | 1-1 |  |  | |  | |
| ИТОГО | 30 |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 52 | |  | 28 |  |  | | 4 | |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 4 |  |  | Экзамен  устно | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Период обучения (модуль): Семестр 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование темы (раздела, части) | Вид учебных занятий | Количество часов |
| I. | Основы логических исчислений | лекции | 18 |
| практические занятия | 18 |
| по методическим материалам | 32 |
| II. | Основы теории алгоритмов | лекции | 12 |
| практические занятия | 12 |
| по методическим материалам | 20 |
| III. | Промежуточная аттестация | консультация | 2 |
| самостоятельная работа | 28 |
| экзамен | 2 |
| **Итого** | | | **144** |

Курс обучения состоит из двух частей:

1. Основы логических исчислений – 36 часов

2. Основы теории алгоритмов – 24 часа

1. Основы логических исчислений – 36 часов (18 ч. лекций, 18 ч. практ. зан.)

**Лекции**

I. Введение: 1 ч. лекций.

История возникновения и развития математической логики в широком смысле этого слова.

II. Исчисление высказываний: 5 ч. лекций.

Понятие пропозициональной формулы. Понятие кванторной пропозициональной формулы. Равнозначность пропозициональных формул. Выразимость булевых функций через пропозициональную формулу. Секвенция и ее логическая и числовая интерпретация. Секвенциальное исчисление высказываний. Метод резолюций для исчисления высказываний.

III. Исчисление предикатов: 6 ч. лекций.

Понятие терма. Атомарная формула. Формула исчисления предикатов. Секвенция и ее формульный образ. Секвенциальное исчисление предикатов. Метод резолюций для исчисления предикатов.

IV. Аксиоматические теории: 6 ч. лекций.

Исчисление предикатов с равенством (аксиомы равенства и согласованности с равенством).

Формальная арифметика. Аксиомы элементарной теории чисел (формальной арифметики). Первая теорема Геделя о неполноте арифметики. Вторая теорема Геделя о неполноте арифметики. Гиперчисла. Элементы нестандартного анализа. Парадокс Рассела в наивной теории множеств. Аксиоматические теории множеств: Теория типов Рассела и аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля. Аксиоматические теории множеств как расширение формальной арифметики.

Цель данного этапа обучения – Овладение практическими навыками логической формализации утверждений и доказательствами в логических секвенциальных исчислениях.

Знания и умения по завершении профессионально-ориентированного модуля

К концу данного этапа обучения студент должен:

- уметь формализовывать условия и утверждения средствами математической логики;

- уметь строить выводы секвенций.

2. Основы теории алгоритмов – 24 часа (12 ч. лекций, 12 ч. практ. зан.)

V. Элементы теории алгоритмов: 8 ч. лекций.

Различные варианты математического понятия алгоритма: примитивно-рекурсивные функции, частично-рекурсивные функции, общерекурсивные функции, тезис Чёрча, машина Тьюринга, тезис Тьюринга-Чёрча, недетерминированная машина Тьюринга, Теоремы о числе шагов машины Тьюринга, моделирующей многоленточную или недетерминированную машину Тьюринга, нормальный алгоритм, принцип нормализации Маркова. Данные для алгоритмов. Программы на языке Паскаль как алгоритмы.

Простейшие теоремы о невозможности алгоритмов. Понятие массовой проблемы. Алгоритмическая неразрешимость простейших массовых проблем: проблема применимости, непродолжимость универсального алгоритма до всюду применимого, неразрешимость проблемы общезначимости в исчислении предикатов.

VI. Элементы теории сложности алгоритмов: 4 ч. лекций .

Понятие вычислительной сложности алгоритма и задачи как функции от длины записи исходных данных.

Определение иерархии по времени и памяти детерминированных и недетерминированных машин Тьюринга. Определение и примеры NP-полных и PSPACE-полных задач.

Цель данного этапа обучения – Овладение практическими навыками построения программ для основных математических понятий алгоритма

Знания и умения по завершении профессионально-ориентированного модуля

К концу данного этапа обучения студент должен:

• Знать основные типы команд машин Тьюринга и нормальных алгоритмов;

• приобрести навыки построения программ машин Тьюринга и нормальных алгоритмов.

**Практические занятия**

1. Основы логических исчислений.

II. Исчисление высказываний: 6 ч. практ. зан.

Таблицы истинности и равносильные преобразования пропозициональной формулы. Выразимость булевых функций через пропозициональные формулы. Формализация текстов естественного языка. Построение вывода в секвенциальном исчислении высказываний. Доказательство методом резолюций для исчисления высказываний.

III. Исчисление предикатов: 10 ч. практ. зан.

Формализация утверждений с помощью формул исчисления предикатов. Построение вывода в секвенциальном исчислении предикатов. Доказательство методом резолюций для исчисления предикатов.

Проверочная работа по темам II и III – 2 часа.

Цель данного этапа обучения – Овладение практическими навыками логической формализации утверждений и доказательств в логических секвенциальных исчислениях и методом резолюций.

2. Основы теории алгоритмов

V. Элементы теории алгоритмов: 8 ч. практ. зан.

Программирование на машинах Тьюринга. Построение нормальных алгоритмов. Построение нормальных алгоритмов с однопосылочными правилами Поста.

VI. Элементы теории сложности алгоритмов: 2 ч. практ. зан.

Решение задач по оценке числа шагов алгоритмов.

Проверочная работа по темам V, VI – 2 часа.

**Темы для изучения и обсуждения**

1. Применение математической логики в математическом анализе, алгебре и геометрии.

2. Применение теории сложности алгоритмов в программировании.

**Формы контроля:**

1. Текущий контроль (по завершении первого модуля) — проверочная  работа.

2. Итоговый контроль (в конце семестра) — устный экзамен.

**Темы для самостоятельной работы**

1. Доказательство утверждений в аксиоматической элементарной теории чисел.

2. Доказательство утверждений в аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля.

**Раздел 3.** **Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение учебной дисциплины**

**3.1.1. Методические указания по освоению дисциплины**

Методические материалы включают в себя следующие типы материалов: методические указания для обучающихся, Интернет-ресурсы, электронные учебные пособия

**3.1.2. Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Самостоятельная работа обучающихся, как вид деятельности, стимулирующий активность, самостоятельность, познавательный интерес с целью поиска необходимой информации, приобретения знаний, использования этих знаний для решения учебных, научных и профессиональных задач, представляет собой важную составляющую учебного процесса, которой отводится не менее половины учебного времени при очной форме обучения. Время, отводимое на самостоятельную работу, должно использоваться студентами для наиболее полного освоения учебной дисциплины. Следовательно, организация эффективной внеаудиторной самостоятельной работы в процессе обучения требует, с одной стороны, создание условий, призванных обеспечить рациональное и планомерное управление учебной деятельностью, протекающей в отсутствие преподавателя, и тщательной подготовки целого ряда учебных пособий, снабженных методическими указаниями, с другой стороны.

К числу методических пособий относятся:

• учебно-тематический план работы, в котором определена тематика и виды самостоятельной работы и указан рекомендуемый объем материала и время его освоения;

• общие методические рекомендации и указания по самостоятельной работе;

• фонд контрольных заданий и тестов для самоконтроля, которые позволяют оценить уровень знаний, навыков и умений студентов согласно требованиям курса, государственным стандартам и европейским компетенциям.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Текущий контроль осуществляется в результате обсуждения со студентами пройденного материала, а также проведения проверочных работ. В результате активного участия в обсуждениях студент может получить дополнительный балл к итоговой аттестации. Каждая успешно выполненная проверочная работа упрощает процесс сдачи экзамена.

Оценка на экзамене формируется следующим образом.

Учитываются результаты проверочных работ или решение типовых задач до получения экзаменационного билета (не более 2 часов на решение типовых задач).

Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Процесс сдачи экзамена происходит следующим образом.

- Сразу после получения студентом билета в течение 3 – 5 минут проверяется знание основных определений и формулировок теорем, входящих в билет. В зависимости от верности ответов студент может получить оценки «неудовлетворительно» (если не знает 2 из 3-х определений или формулировок), «удовлетворительно» (если знает 3 определения или формулировки из билета и согласен с этой оценкой) или уйти на место и в течение 40 минут подготовиться к полному ответу на билет.

- После подготовки к ответу студент должен продемонстрировать умение связно излагать основные вопросы курса, в частности, доказывать теоремы. Если содержание ответа не соответствует содержанию курса, то студент получает оценку «удовлетворительно». При грамотном изложении содержания билета студент может (при его согласии) получить оценку «хорошо» или получить нестандартную задачу по темам курса (время решения такой задачи ограничено временем экзамена, но не более 2 часов) для получения оценки «отлично. В качестве решения нестандартной задачи может быть учтено активное участие в обсуждениях материала или решение нестандартных задач во время аудиторной работы. Если нестандартная задача не решена, то студент получает оценку «хорошо».

Оценка «**отлично**» (**A**) ставится за полный ответ на вопросы билета и решение дополнительной задачи или активное обсуждение материала во время занятий.

Оценка «**хорошо**» (**B**) ставится за полный ответ на вопросы билета и отказ на получение дополнительной задачи (или её неправильное решение).

Оценка «**хорошо**» (**C**) ставится за полный ответ на вопросы билета с небольшими неточностями.

Оценка «**удовлетворительно**» (**D**) ставится за знание основных формулировок (по одной из каждого вопроса) и отказ на полный ответ на вопросы билета или неудовлетворительный ответ на него.

Оценка «**удовлетворительно**» (**E**) ставится за знание основных формулировок (по одной из каждого вопроса) с подсказками со стороны преподавателя.

Оценка «**неудовлетворительно**» (**F**) ставится в остальных случаях.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

***Примерный перечень вопросов к экзамену***

1. Пропозициональные формулы. Таблицы истинности. Равносильные формулы. Основные равносильности. Тавтологии и противоречия. Теорема о ДНФ.
2. Понятия исчисления и формальной теории. Вывод, выводимая формула, полнота и непротиворечивость. Допустимое правило.
3. Секвенциальное исчисление высказываний. Допустимые правила секвенциального исчисления высказываний.
4. Теоремы о семантическом обосновании секвенциального исчисления высказываний (связь между выводимостью и тавтологичностью).
5. Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления высказываний.
6. Метод резолюций для исчисления высказываний. Обоснование доказательства следования *A1, ... , An => B1, ... , Bk*.
7. Предикатные формулы: терм, атомарная формула, предикатная формула. Область действия квантора, свободные и связанные вхождения предметной переменной в формулу. Терм, свободный для подстановки в формулу вместо свободных вхождений предметной переменной.
8. Интерпретации. Общезначимые и выполнимые формулы, противоречия.
9. Смысл формулы с *n* свободными переменными в заданной интерпретации.
10. Секвенциальное исчисление предикатов. Необходимость соблюдения ограничений на кванторные правила (примеры).
11. Полнота и непротиворечивость секвенциального исчисления предикатов.
12. Метод резолюций для исчисления предикатов. Обоснование доказательства следствия *A1, ... , An => B1, ... , Bk* .
13. Понятие формальной теории. Формальные теории с равенством (примеры). Аксиомы для равенства и аксиомы согласования с равенством.
14. Формальная арифметика (аксиоматическая теория чисел).
15. Первая теорема Геделя.
16. Вторая теорема Геделя.
17. Консервативность расширения формальной арифметики бесконечно большими числами.
18. Парадокс Рассела в наивной теории множеств. Его отсутствие в аксиоматических теориях множеств.
19. Теория типов Рассела.
20. Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля.
21. Ординальные числа.
22. Конструктивные объекты. Формулы Бэкуса.
23. Примеры математических понятий алгоритма.
24. Тезис Чёрча, тезис Тьюринга-Чёрча, принцип нормализации Маркова.
25. Соотношения числа шагов машины Тьюринга и её модификаций, решающих одну и ту же задачу.
26. Теорема о композиции машин Тьюринга.
27. Теоремы о невозможности построения алгоритма.
28. Массовые проблемы. Алгоритмическая разрешимость/неразрешимость массовой проблемы.
29. Теоремы об алгоритмической неразрешимости задач: самоприменимость алгоритма, самоанулируемость алгоритма, применимость алгоритма к данным, общезначимость формулы исчисления предикатов.
30. Вычислительная сложность алгоритма, верхняя и нижняя оценки сложности алгоритма. Верхняя оценка вычислительной сложности задачи.
31. Классы сложности. Соотношения между классами **P,** **NP** и **P-SPACE**.
32. Основные различия между классами предикатов и классами функций.
33. Полиномиальная сводимость и полиномиальная эквивалентность.
34. Понятие NP-полной задачи.
35. Примеры NP-полных задач.
36. Наилучшая в настоящее время оценка числа шагов решения NP-полной задачи.
37. Псевдополиномиальные алгоритмы.

***Примеры задач для контрольных работ***

1. Проверить выводимость формулы, построив вывод в секвенциальном исчислении предикатов. Если формула не выводима, то указать, какая именно из двух импликаций не является выводимой. Для этой импликации указать:
   * Ограничения на входящие в неё формулы, при которых секвенция выводима.
   * Доказать, что эта импликация не является общезначимой.

1. Записать каждое утверждение формулой и доказать выводимость последнего факта из предыдущих: «Всякое рациональное число есть вещественное число. Существуют рациональные числа. Следовательно, существуют вещественные числа.».

***Соответствие индикаторов достижения компетенций и контрольно-измерительных материалов***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции | Контрольно-измерительные материалы (КИМ) (тестовые вопросы, контрольные задания, кейсы и пр.) |
|  | 1 | 2 |
| 11 | ОПК-1.002184.1. Формулирует и доказывает утверждения в виде формул математической логики | Примеры задач для контрольных работ |
| 22 | ПКА-1.002184.1. Излагает и объясняет основные понятия и теоремы математической логики | Примерный перечень вопросов к экзамену |

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К преподаванию дисциплины могут быть допущены преподаватели, имеющие диплом о высшем образовании и владеющие знаниями в области математической логики и теории алгоритмов.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Специальных требований нет

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные стандартным оборудованием, используемым для обучения в СПбГУ в соответствии с требованиями материально-технического обеспечения.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное оборудование, используемое для обучения в СПбГУ.

MS Windows, MS Office, Mozilla FireFox, Google Chrome, Acrobat Reader DC, WinZip, Антивирус Касперского.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Специальных требований нет.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Специальных требований нет.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел в количестве не менее 1 куска на 1 академический час.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Клини С. Математическая логика. – М., Наука, 1965. 391 с.

2. Косовский Н.К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. – Л., ЛГУ, 1980. 192 с.

3. Косовский Н.К., Тишков А.В. Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств. – Изд-во С.-Петербургского университета, 2000. 268 с.

4. Косовская Т.М. Обучение формализации и проверке правильности рассуждений средствами исчислений высказываний и предикатов. Учебное пособие. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 127 c.

5. Косовский Н.К. Основы теории элементарных алгоритмов. – Л., ЛГУ, 1987. 152 с.

6. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М., Наука, 1965. 391 с.

7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М., Мир, 1982. 416 с.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М., Наука, 2001. 256 с. (и др. издания)

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

* Сайт Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: http://www.library.spbu.ru/
* Электронный каталог Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: http://www.library.spbu.ru/cgi-bin/irbis64r/cgiirbis\_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS
* Перечень электронных ресурсов, находящихся в доступе СПбГУ: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/
* Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?name=rures&resource_type=8>

**Раздел 4. Разработчики программы**

Косовская Т.М., д.ф.м.н., доц., проф, [t.kosovskaya@spbu.ru](mailto:t.kosovskaya@spbu.ru), +7 (812) 428 42 33